CONTRAINTES DE TOUT POIL

Alain Colmerauer

Juin 2004

LIF
CNRS, Universités de Provence
et de la Méditerranée

Table des matières

CONTRAINTES NUMERIQUES AVEC QUANTIFICATION . . . 3
- CONTRAINTE A UNE INCONNUE . . . 4
- CONTRAINTE A UNE INCONNUE, 2 . . . 5
- CONTRAINTE A DEUX INCONNUES . . . 6
- CONTRAINTE A TROIS INCONNUES . . . 7
- MONSIEUR P ET MADAME S . . . 8
- MONSIEUR P ET MADAME S, 2 . . . 9
- DECOUPAGE D'UN CARRE EN CARRES TOUS DIFFERENTS . . . 10
- DECOUPAGE D'UN CARRE EN CARRES TOUS DIFFERENTS, 2 . . . 11
- DECOUPAGE D'UN CARRE EN CARRES TOUS DIFFERENTS, 3 . . . 12
- DECOUPAGE D'UN CARRE EN CARRES TOUS DIFFERENTS, 4 . . . 13
- DECOUPAGE D'UN CARRE EN CARRES TOUS DIFFERENTS, 5 . . . 14
- NOMBRE PREMIER . . . 15
- NOMBRE PREMIER, 2 . . . 16

PROPRIETES DES DIFFERENTES STRUCTURES . . . 17
- RATIONNELS ADDITIFS ORDONNES . . . 18
- RATIONNELS ADDITIFS ORDONNES, 2 . . . 19
- RATIONNELS ADDITIFS ORDONNES, 3 . . . 20
- ENTIERS ADDITIFS ORDONNES . . . 21
- ENTIERS ADDITIFS ORDONNES, 2 . . . 22
- ARITHMETIQUE NATURELLE . . . 23
- CORPS ORDONNE DES REELS . . . 25
- CORPS ORDONNE DES REELS, 2 . . . 26

ALGEBRE DE BOOLE A DEUX VALEURS . . . 27
- ALGEBRE DE BOOLE . . . 28
- ALGEBRE DE BOOLE, 2 . . . 29
- ALGEBRE DE BOOLE, 3 . . . 30
- ALGEBRE DE BOOLE, 4 . . . 31
- ALGEBRE DE BOOLE, 5 . . . 33
- ALGEBRE DE BOOLE, 6 . . . 34
- ALGEBRE DE BOOLE, 7 . . . 35

RESOLUTION APPROCHEE PAR REDUCTION D'INTERVALLES . . . 36
- RESOLUTION APPROCHEE PAR CALCUL DE POINT FIXE . . . 37
- RESOLUTION APPROCHEE PAR CALCUL DE POINT FIXE, 2 . . . 38
- RESOLUTION APPROCHEE PAR CALCUL DE POINT FIXE, 3 . . . 39
- CONTRAINTE D'ADDITION . . . 40
- CONTRAINTE DE MULTIPLICATION . . . 41
- UN APERCU DE LA MULTIPLICATION . . . 43

CONTRAINTES GLOBALES . . . 44
- CONTRAINTES DE TRI . . . 45
- EXEMPLES D'INTERVALLES a_i avec $2n = 22$ . . . 46
- LES b_i OBTENUS PAR REDUCTION . . . 47
- EXEMPLE DE RESOLUTION POUR $2n = 100$ . . . 48
- CONTRAINTE DE PERMUTATION . . . 49
- CONTRAINTE TOUS DIFFERENTS . . . 50

CONTRAINTES NUMERIQUES AVEC QUANTIFICATION

CONTRAINTE A UNE INCONNUE

- Une brique pèse un kg plus la moitié de son poids. Quel est son poids ?
- Soit x le poids de la brique. On a

$$x = 1 + \frac{1}{2}x,$$

donc

$$2x = 2 + x,$$

donc

$$2x + (-x) = 2,$$

c'est-à-dire

$$x = 2.$$

CONTRAINTE A UNE INCONNUE, 2

• Du fait que

$$x = 1 + \frac{1}{2}x,$$

s'écrit

$$2x = 2 + x$$

qui s'écrit

$$x + x = 1 + 1 + x,$$

• on peut se contenter de travailler dans la structure des nombres rationnel additifs

$$(\mathbb{Q}, +, -,\ 0,\ 1).$$

CONTRAINTE A DEUX INCONNUES

• Un groupe de poules et de lapins totalise 5 têtes et 14 pattes. Combien y-a-t-il de poules et combien y-a-t-il de lapins ?

• Soit x le nombre de poules et y le nombre de lapins. On a

$$x + y = 5 \ \wedge \ 2x + 4y = 14,$$

donc

$$x + y = 5 \ \wedge \ 2x - 2x + 4y - 2y = 14 - 10,$$

donc

$$x + y = 5 \ \wedge \ 2y = 4,$$

c'est-à-dire

$$x = 3 \ \wedge \ y = 2.$$

• Ici aussi on travaille dans

$$(\mathbb{Q}, +, -, \ 0, \ 1).$$

CONTRAINTE A TROIS INCONNUES

- On se place dans le corps ordonné des réels

$$(\mathbb{R}, \geq, +, \times, -,\ 0,\ 1)$$

- Sous quel condition les nombres réels a, b, c satisfont à la contrainte

$$(\exists x)[ax^2 + bx + c = 0]\ ?$$

- La réponse est

$$(\neg a = 0\ \wedge\ b^2 - 4ac \geq 0)\ \vee\ (a = 0\ \wedge\ \neg b = 0)\ \vee\ (a = 0\ \wedge\ c = 0).$$

MONSIEUR P ET MADAME S

- Soient x et y deux entiers pris dans $2..100$.
- Madame S connaît la valeur de la somme $x + y$,
- Monsieur P connaît la valeur du produit xy,
- Madame S sait que monsieur P connaît le produit et vice-versa.
- Le dialogue suivant s'engage :

1. Monsieur P : je ne connais pas les deux nombres,
2. Madame S : je le savais,
3. Monsieur P : maintenant je les connais,
4. Madame S : et moi aussi.

- Trouver la valeur de la paire $\{x, y\}$.
- La réponse est

$$\{x, y\} = \{?, ?\}.$$

MONSIEUR P ET MADAME S, 2

- On se place dans

$$(\mathbb{N}, \leq, +, \times,\ 0,\ 1)$$

- Introduisons les contraintes

$$\begin{aligned} D(x) &:= 2 \leq x \wedge x \leq 100, \\ R(p,s) &:= (\exists x)(\exists y)[D(x) \wedge D(y) \wedge p = xy \wedge s = x + y]. \end{aligned}$$

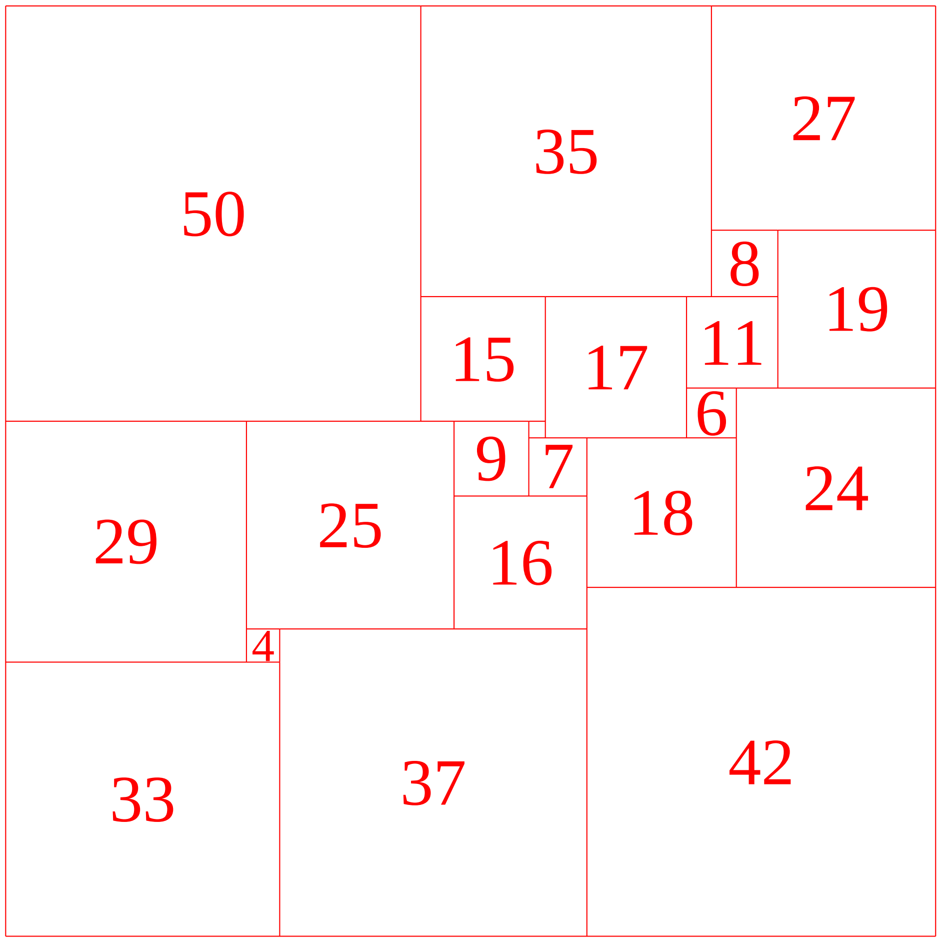
- x, y sont les solutions de la contrainte

$$\varphi(x,y) := (\exists p)(\exists s) \begin{bmatrix} D(x) \wedge D(y) \wedge p = xy \wedge s = x + y \wedge \\ \varphi_1(p) \wedge \varphi_2(s) \wedge \varphi_3(p) \wedge \varphi_4(s) \end{bmatrix},$$

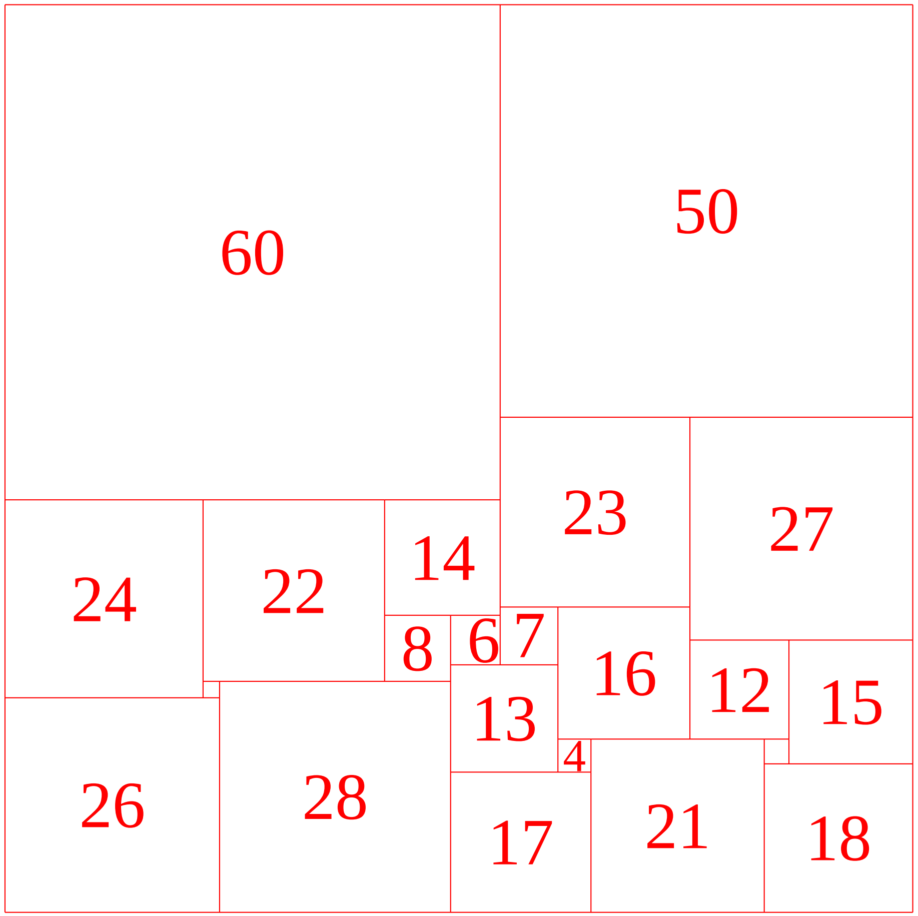
avec

$$\begin{aligned} \varphi_1(p) &:= (\exists s_1)(\exists s_2)[\neg s_1 = s_2 \wedge R(p,s_1) \wedge R(p,s_2)], \\ \varphi_2(s) &:= (\forall p)[R(p,s) \to \varphi_1(p)], \\ \varphi_3(p) &:= (\forall s_1)(\forall s_2)[R(p,s_1) \wedge \varphi_2(s_1) \wedge R(p,s_2) \wedge (\varphi_2(s_2) \to s_1 = s_2)], \\ \varphi_4(s) &:= (\forall p_1)(\forall p_2)[R(p_1,s) \wedge \varphi_3(p_1) \wedge R(p_2,s) \wedge (\varphi_3(p_2) \to p_1 = p_2)]. \end{aligned}$$

DECOUPAGE D'UN CARRE EN CARRES TOUS DIFFERENTS



112×112, 21 carrés



110×110, 22 carrés

Littérature : Thèse de Ian Gambini [1999].

DECOUPAGE D’UN CARRE EN CARRES TOUS DIFFERENTS, 2

• On se place dans

$$(\mathbb{Q}, \leq, +, -, 0, 1)$$

• Pour n fixé, voici la contrainte sur la tailes c_0 du carré découpé et les tailles $c_1, \ldots, c_n$, toutes différentes, des carrés obtenus :

DECOUPAGE D'UN CARRE EN CARRES TOUS DIFFERENTS, 3

$$\mathit{d\acute{e}composition}(c_0, c_1, \ldots, c_n) \ :=$$

$$0 < c_1 \ \wedge \ c_1 < c_2 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ c_{n-1} < c_n \ \wedge$$

$$\left[\begin{array}{l}
\exists x_1 \exists y_1 \ldots \exists x_n \exists y_n \\
(\wedge_{i=1}^{n} \left[\begin{array}{l} x_i \in [0, c_0 - c_i) \ \wedge \\ y_i \in [0, c_0 - c_i) \end{array}\right] \ \wedge \\
\left[\begin{array}{l}
\forall x \forall y \forall b_1 \ldots \forall b_n \\
\left[\begin{array}{l}
x \in [0, c_0) \ \wedge \\
y \in [0, c_0) \ \wedge \\
(\wedge_{i=1}^{n} \left[b_i = 0 \vee b_i = 1\right]) \ \wedge \\
(\wedge_{i=1}^{n} \left[\begin{array}{l} x \in [x_i, x_i + c_i) \ \wedge \\ y \in [y_i, y_i + c_i) \ \wedge \\ \leftrightarrow b_i = 1 \end{array}\right])
\end{array}\right] \\
\rightarrow \sum_{i=1}^{n} b_i = 1
\end{array}\right]
\end{array}\right]$$

DECOUPAGE D'UN CARRE EN CARRES TOUS DIFFERENTS, 4

• On se place dans

$$(\mathbb{Z}, \leq, +, -,\ 0,\ 1)$$

• On découpe un carré de dimension donné $n \times n$ en n carrés de tailles entières c_i. Les c_i sont tous différents sauf éventuellemnt les m premiers de tailles nulles.

DECOUPAGE D'UN CARRE EN CARRES TOUS DIFFERENTS, 5

$$\textit{décompositionentière}_n(c_1,\ldots,c_n) \;:=$$

$$\begin{bmatrix} \exists c_0\, c_0 = 0 \;\wedge \\ (\wedge_{i=1}^n c_{i-1} \leq c_i) \;\wedge \\ (\wedge_{i=2}^n c_{i-1} = c_i \;\rightarrow\; c_{i-2} = c_{i-1}) \end{bmatrix} \wedge$$

$$\begin{bmatrix} \exists x_1 \exists y_1 \ldots \exists x_n \exists y_n \\ (\wedge_{i=1}^n \begin{bmatrix} x_i \in [0, n-1-c_i] \;\wedge \\ y_i \in [0, n-1-c_i] \end{bmatrix} \wedge \\ \begin{bmatrix} \forall x \forall y \forall b_1 \ldots \forall b_n \\ \begin{bmatrix} x \in [0, n-1] \wedge \\ y \in [0, n-1] \wedge \\ (\wedge_{i=1}^n [b_i = 0 \vee b_i = 1]) \;\wedge \\ (\wedge_{i=1}^n \begin{bmatrix} x \in [x_i, x_i + c_i - 1] \;\wedge \\ y \in [y_i, y_i + c_i - 1] \;\wedge \\ \leftrightarrow b_i = 1 \end{bmatrix}) \end{bmatrix} \\ \rightarrow \sum_{i=1}^n b_i = 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

NOMBRE PREMIER

On se place dans

$$(\mathbb{Z}, \leq, +, -, \times,\ 0,\ 1)$$

- Contrainte évidente

$$\textit{premier}(\nu) \ := $$
$$\nu \geq 2 \land \neg(\exists x)(\exists y)(x \geq 2 \land y \geq 2 \land \nu = xy)$$

NOMBRE PREMIER, 2

- Contraintes non évidente

$$
\begin{aligned}
&\mathit{premier}(\nu) \;:= \\
&\nu \geq 0 \wedge \\
&(\exists a)(\exists b)\ldots(\exists z)(a \geq 0 \wedge b \geq 0 \;\wedge \cdots \wedge z \geq 0 \wedge \\
&\nu = (k+2)(1-(wz+h+j-q)^2 \\
&\qquad\qquad -((gk+2g+k+1)(h+j)+h-z)^2 \\
&\qquad\qquad -(2n+p+q+z-e)^2 \\
&\qquad\qquad -(16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2)^2 \\
&\qquad\qquad -(e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2)^2 \\
&\qquad\qquad -((a^2-1)y^2+1-x^2)^2 \\
&\qquad\qquad -(16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2)^2 \\
&\qquad\qquad -(n+l+v-y)^2 \\
&\qquad\qquad -(((a+u^2(u^2-a))^2-1)(n+4dy)^2+1-(x+cu)^2)^2 \\
&\qquad\qquad -((a^2-1)l^2+1-m^2)^2 \\
&\qquad\qquad -(q+y(a-p-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-x)^2 \\
&\qquad\qquad -(z+pl(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm)^2 \\
&\qquad\qquad -(ai+k+1-l-i)^2 \\
&\qquad\qquad -(p+l(a-n-1)+b(2an+2a-n^2-2n-2)-m)^2))
\end{aligned}
$$

Littérature : Jones, Sato, Wada et Wiens [1976].

PROPRIETES DES DIFFERENTES STRUCTURES

RATIONNELS ADDITIFS ORDONNES

- On est dans

$$(\mathbb{Q}, \leq, <, +, -,\ 0,\ 1)$$

- Axiomatisation

Lien entre $\leq$ et $<$

(1) $(\forall x)(\forall y)[x < y \ \leftrightarrow\ \neg y \leq x]$

Ordre strict

(2) $(\forall x)[\neg x < x]$

(3) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x < y \wedge y < z \ \rightarrow\ x < z]$

Ordre total

(4) $(\forall x)(\forall y)[x < y \vee x = y \vee y < x]$

Ordre dense

(5) $(\forall x)(\forall y)[x < z \rightarrow (\exists y)[x < y \wedge y < z]]$

Ordre sans extrêmes

(6) $(\forall x)(\exists y)[y < x]$

(7) $(\forall x)(\exists y)[x < y]$

RATIONNELS ADDITIFS ORDONNES, 2

- Suite de l'axiomatisation

Propriétés des constantes

(8) $\neg 0 = 1$

Propriétés de l'addition

(9) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x + (y + z) = (x + y) + z]$
(10) $(\forall x)(\forall y)[x + y = y + x]$
(11) $(\forall x)[x + 0 = x]$
(12) $(\forall x)[x + (-x) = 0]$
(13_n) $(\forall x)(\exists y)[x = \underbrace{y + \cdots + y}_{n}]$

Interférence de l'ordre avec les constantes et l'addition

(14) $0 \leq 1$
(15) $(\forall x)(\forall y)[x \leq y \ \rightarrow \ x + z \leq y + z]$

RATIONNELS ADDITIFS ORDONNES, 3

Des axiomes précédents on déduit notamment

- $s = t \ \leftrightarrow \ s \leq t \wedge t \leq s$
- $0 \leq 1 + \cdots + 1 \ \leftrightarrow \ \textit{vrai}$
- $x \leq x \ \leftrightarrow \ \textit{vrai}$
- $s \leq t \ \leftrightarrow \ ks \leq kt$
- $\neg s \leq t \ \leftrightarrow \ t < s$
- $(\exists x) \begin{pmatrix} (\wedge_i a_i < kx) \wedge \\ (\wedge_i b_i \leq kx) \wedge \\ (\wedge_i kx < c_i) \wedge \\ (\wedge_i kx \leq d_i) \wedge \\ \varphi \end{pmatrix} \ \leftrightarrow \ \begin{pmatrix} (\wedge_{i,j} a_i < c_j) \wedge \\ (\wedge_{i,j} a_i < d_j) \wedge \\ (\wedge_{i,j} b_i < c_j) \wedge \\ (\wedge_{i,j} b_i \leq d_j) \wedge \\ \varphi \end{pmatrix}$

où les s, t, a_i, b_i, c_i, d_i sont des termes et où on écrit kt pour $\underbrace{t + \cdots + t}_{k}$

Littérature : Algorithme de Jean Baptiste Joseph Fourier.

- **Complexité** : $2^{cn} \leq f(n) \leq 2^{2^{c'n}}$

ENTIERS ADDITIFS ORDONNES

- On est dans

$$(\mathbb{Z}, \leq, +, -, \ 0, \ 1)$$

- Axiomatisation

Propriétés des constantes

(1) $\neg 0 = 1$

Propriétés de l'addition

(2) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x + (y + z) = (x + y) + z]$

(3) $(\forall x)(\forall y)[x + y = y + x]$

(4) $(\forall x)[x + 0 = x]$

(5) $(\forall x)[x + (-x) = 0]$

(6_n) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)[x = \underbrace{y + \cdots + y}_{n} + z + \begin{pmatrix} z = 0 \ \vee \\ z = 1 \ \vee \\ z = 1 + 1 \ \vee \\ \cdots \\ z = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-1} \end{pmatrix}]$

ENTIERS ADDITIFS ORDONNES, 2

- Suite de l'axiomatisation

Relation d'ordre total

(7) $(\forall x)[x \leq x]$

(8) $(\forall x)(\forall y)[x \leq y \wedge y \leq x \;\rightarrow\; x = y]$

(9) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x \leq y \wedge y \leq z \;\rightarrow\; x = z]$

(10) $(\forall x)(\forall y)[x \leq y \vee y \leq x]$

Interférence de l'ordre avec le reste

(11) $0 \leq 1$

(12) $(\forall x)[\neg x \leq 0 \;\rightarrow\; 1 \leq x]$

(13) $(\forall x)(\forall y)[x \leq y \;\rightarrow\; x + z \leq y + z]$

- **Complexité** : $2^{2^{cn}} \leq f(n)$

ARITHMETIQUE NATURELLE

- On est dans

$$(\mathbb{N}, +, \times,\ 0,\ 1)$$

- Axiomatisation incomplète de Peano

Propriétés des constantes

(1) $\neg 0 = 1$

Propriétés de l'addition

(2) $(\forall x)[x + 1 = y + 1 \ \rightarrow\ x = y]$

(3) $(\forall x)[x + 0 = x]$

(4) $(\forall x)(\forall y)[x + (y + 1) = (x + y) + 1]$

Propriétés de la multiplication

(5) $(\forall x)[x \times 0 = 0]$

(6) $(\forall x)(\forall y)[x \times (y + 1) = (x \times y) + x]$

Schéma d'induction

(7_φ) $\varphi(0)\ \wedge\ (\forall x)[\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + 1)]\ \rightarrow (\forall x)\varphi(x)$

• En enlevant (5) et (6) on obtient une axiomatisation complète de

$$(\mathbb{N}, +,\ 0,\ 1),$$

dite *arithmétique de Presburger*.

CORPS ORDONNE DES REELS

- On est dans

$$(\mathbb{R}, \leq, +, -, \times,\ 0,\ 1)$$

- Axiomatisation

Propriétés des constantes

(1) $\neg 0 = 1$

Propriétés de l'addition

(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

(3) $x + y = y + x$

(4) $x + 0 = x$

(5) $x + (-x) = 0$

Propriétés de la multiplication

(6) $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$

(7) $x \times y = y \times x$

(8) $x \times 1 = x$

(9) $\neg x = 0 \longrightarrow (\exists y)(x \times y = 1)$

(10) $x \times y = 0 \longrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$

CORPS ORDONNE DES REELS, 2

- Suite de l'axiomatisation

  Interférences entre addition et multiplication

  (11) $x \times (y+z) = (x \times y) + (x \times z)$

  (12) $(\exists y)(y^2 = x \vee y^2 + x = 0)$

  (13_n) $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \;\longrightarrow\; x_0 = 0 \wedge x_1 = 0 \wedge \cdots \wedge x_n = 0$

  (14_n) $\neg x_{2n+1} = 0 \;\longrightarrow\; (\exists y)[x_{2n+1}y^{2n+1} + x_{2n}y^{2n} + \cdots + x_0 = 0]$

  Introduction de l'ordre

  (14) $x \leq y \;\leftrightarrow\; (\exists z)[x + z^2 = y]$

- Littérature : Alfred Tarsky, Georges Collins, James Renegar, Hoon Hong, …

ALGEBRE DE BOOLE A DEUX VALEURS

ALGEBRE DE BOOLE

On se place dans la structure

$$(\{0,1\}, \sqcup, \sqcap, \ \bar{}\ , \ 0, \ 1)$$

avec

$$x \sqcup y = \max\{x, y\},$$
$$x \sqcap y = \min\{x, y\},$$
$$\overline{0} = 1,$$
$$\overline{1} = 0.$$

ALGEBRE DE BOOLE, 2

Soient $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p$ des variables booléennes auxqelles sont associés les propriétés suivantes :

a : "avoir l'esprit clair",
b : "avoir reçu une bonne éducation",
c : "discourir sans cesse",
d : "employer son influence à des fins méritoires",
e : "être affiché dans des vitrines",
f : "être apte à être député",
g : "être un bienfaiteur du peuple",
h : "être digne d'éloges",
i : "être populaire",
j : "être sans prétentions",
k : "être une femme",
l : "laisser un souvenir impérissable",
m : "posséder une influence",
n : "savoir garder un secret",
o : "s'exprimer bien",
p : "valoir son pesant d'or".

ALGEBRE DE BOOLE, 3

Soient les 18 énoncés :

1. Tout individu apte à être député et qui ne passe pas son temps à faire des discours est un bienfaiteur du peuple.
2. Les gens à l'esprit clair, et qui s'expriment bien, ont reçu une éducation convenable.
3. Une femme qui est digne d'éloges est une femme qui sait garder un secret.
4. Les gens qui rendent des services au peuple, mais n'emploient pas leur influence à des fins méritoires, ne sont pas dignes d'être députés.
5. Les gens qui valent leur pesant d'or et qui sont dignes d'éloges, sont toujours sans prétention.
6. Les bienfaiteurs du peuple qui emploient leur influence à des fins méritoires sont dignes d'éloges.
7. Les gens qui sont impopulaires et qui ne valent pas leur pesant d'or, ne savent pas garder un secret.
8. Les gens qui savent parler pendant des heures et des heures et qui sont aptes à être députés, sont dignes d'éloges.
9. Tout individu qui sait garder un secret et qui est sans prétention, est un bienfaiteur du peuple dont le souvnir restera impérissable.

ALGEBRE DE BOOLE, 4

10. Une femme qui rend des services au peuple est toujours poulaire.
11. Les gens qui valent leur pesant d’or, qui ne cessent de discourir, et dont le souvenir demeure impérissable, sont précisément les gens dont on voit la photographie dans toutes les vitrines.
12. Une femme qui n’a pas l’esprit clair et n’a pas reçu une bonne éducation, est inapte à devenir député. Tout individu qui sait garder un secret et qui sait ne pas discouri sans cesse, peut être certain d’être impopulaire.
13. Tout individu qui sait garder un secret et qui sait ne pas discourir sans cesse, peut être certain d’être impopulaire.
14. Un individu à l’esprit clair, qui a de l’influence et l’emploie à des fins méritoires, est un bienfateur du peuple.
15. Un bienfaiteur du peuple sans prétention n’est pas le genre de personnes dont la photographie est affichéee dans toutes les vitrines.
16. Les gens qui savent garder un secret et qui emploient leur influence à des fins méritoires, valent leur pesant d’or.
17. Une personne qui ne sait pas s’exprimer, et qui est incapable d’en influencer d’autres, n’est sûrement pas une femme.

18. Les gens populaires et dignes d'éloges sont, soit des bienfaiteurs du peuple, soit des gens sans prétention.

ALGEBRE DE BOOLE, 5

Ces 18 énoncéss s'expriment par la conjonction

$$\varphi(a,b,c,d,e,f,g,h,i,j,k,l,m,n,o,p) := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \cdots \wedge \varphi_{18}$$

des 18 contraintes booléennes :

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &:= \overline{f} \sqcup c \sqcup g = 1, \\
\varphi_2 &:= \overline{a} \sqcup \overline{o} \sqcup b = 1, \\
\varphi_3 &:= \overline{k} \sqcup \overline{h} \sqcup n = 1, \\
\varphi_4 &:= \overline{g} \sqcup d \sqcup \overline{f} = 1, \\
\varphi_5 &:= \overline{p} \sqcup \overline{h} \sqcup j = 1, \\
\varphi_6 &:= \overline{g} \sqcup \overline{d} \sqcup h = 1, \\
\varphi_7 &:= i \sqcup p \sqcup \overline{n} = 1, \\
\varphi_8 &:= \overline{c} \sqcup \overline{f} \sqcup h = 1, \\
\varphi_9 &:= \overline{n} \sqcup \overline{j} \sqcup (g \sqcap l) = 1,
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\varphi_{10} &:= \overline{k} \sqcup \overline{g} \sqcup i = 1, \\
\varphi_{11} &:= \overline{p} \sqcup \overline{c} \sqcup \overline{l} \sqcup e = 1, \\
\varphi_{12} &:= \overline{k} \sqcup a \sqcup \overline{b} \sqcup f = 1, \\
\varphi_{13} &:= \overline{n} \sqcup c \sqcup \overline{i} = 1, \\
\varphi_{14} &:= \overline{a} \sqcup \overline{m} \sqcup \overline{d} \sqcup g = 1, \\
\varphi_{15} &:= \overline{g} \sqcup \overline{j} \sqcup \overline{e} = 1, \\
\varphi_{16} &:= \overline{n} \sqcup \overline{d} \sqcup p = 1, \\
\varphi_{17} &:= o \sqcup m \sqcup \overline{k} = 1, \\
\varphi_{18} &:= \overline{i} \sqcup \overline{h} \sqcup g \sqcup j = 1.
\end{aligned}$$

ALGEBRE DE BOOLE, 6

- Répondre à la question :

Quelle relation y-a-t-il entre "être apte à être député", "savoir garder un secret" et "valoir son pesant d'or" ?

revient à simplifier la contrainte (f, n, p non quantifiés)

$$\exists a \exists b \exists c \exists d \exists e \exists g \exists h \exists i \exists j \exists k \exists l \exists m \exists o \exists q \;\; \varphi(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p).$$

- On trouve

$$(n = 1 \wedge f = 1) \rightarrow p = 1,$$

c'est-à-dire que :

Les persones qui savent garder un secret et qui sont aptes à être députés pèsent leur pesant d'or.

ALGEBRE DE BOOLE, 7

- Répondre à la question :

Quelle relation y-a-t-il entre "avoir l'esprit clair", "être populaire" et "être apte à être député" ?

revient à simplifier la contrainte (a, f, i non quantifiés)

$$\exists b \exists c \exists d \exists e \exists g \exists h \exists j \exists k \exists l \exists m \exists n \exists o \exists p \exists q \;\; \varphi(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p)$$

- On trouve

vrai,

c'est-à-dire que :

Il n'existe aucun lien entre "avoir l'esprit clair", "être populaire" et "être apte à être député".

RESOLUTION APPROCHEE PAR REDUCTION D’INTERVALLES

RESOLUTION APPROCHEE PAR CALCUL DE POINT FIXE

- Soit à trouver le ou les x tels que

$$x = \boldsymbol{cos}\, x.$$

- sachant entre autres que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{cos}\, 1 &\in [5/10, 6/10], \\
\boldsymbol{cos}\, 9/10 &\in [6/10, 7/10], \\
\boldsymbol{cos}\, 6/10 &\in [8/10, 9/10], \\
\boldsymbol{cos}\, 5/10 &\in [8/10, 9/10],
\end{aligned}$$

- Introduisons les relations

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{cos} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \boldsymbol{cos}\, x\}, \\
\boldsymbol{\acute{e}gal} &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}.
\end{aligned}$$

- il suffit de résoudre

$$(x, y) \in \boldsymbol{cos} \;\wedge\; (x, y) \in \boldsymbol{\acute{e}gal} \;\wedge\; x \in \mathbb{R} \;\wedge\; y \in \mathbb{R}$$

RESOLUTION APPROCHEE PAR CALCUL DE POINT FIXE, 2

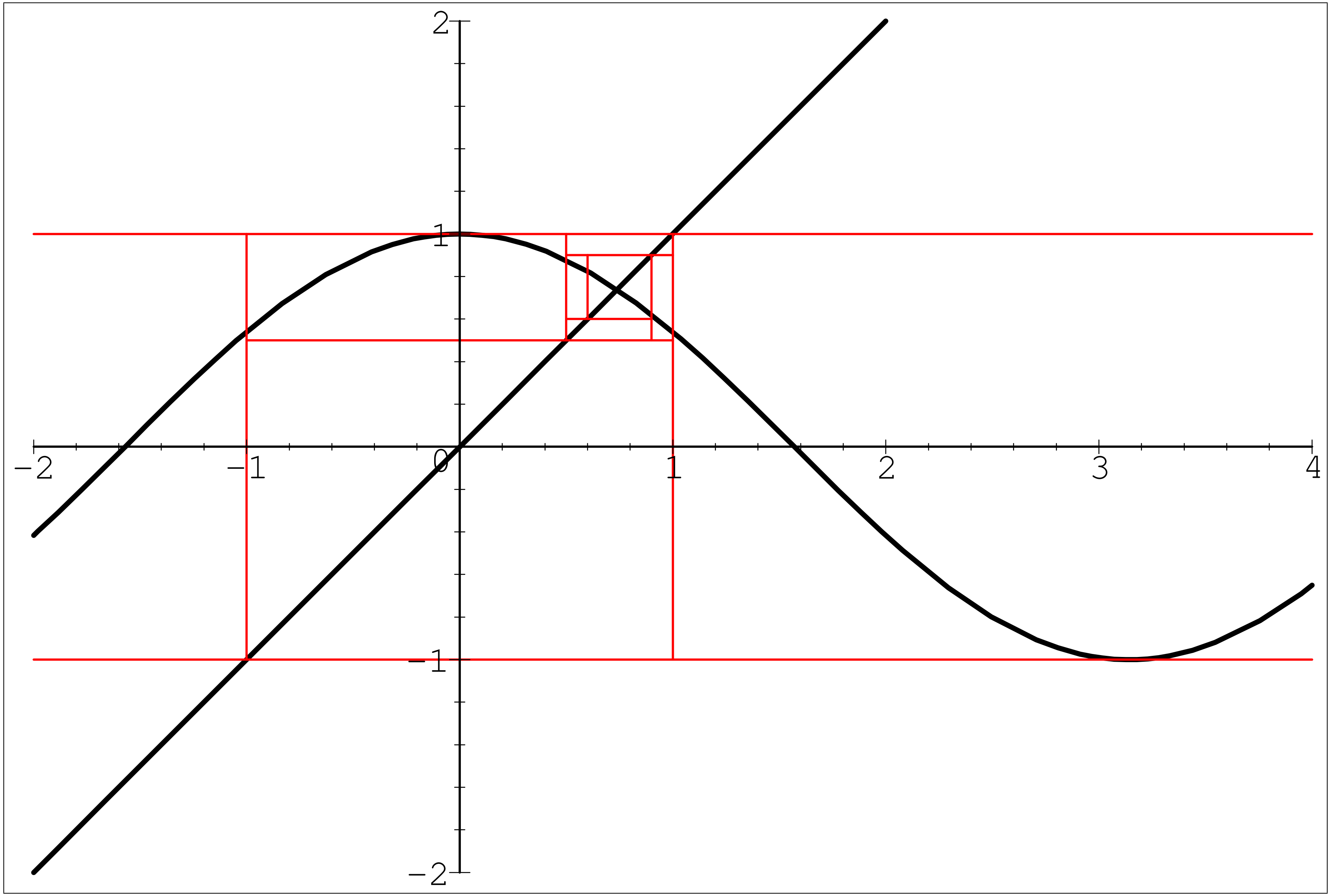
- En réduisant à tour de rôle le cosinus et l'égalité, on obtient

$$
\begin{array}{lllllllll}
(x,y) \in \textit{cos} & \wedge & (x,y) \in \textit{égal} & \wedge & x \in \mathbb{R} & \wedge & y \in \mathbb{R} & \Longrightarrow \\
(x,y) \in \textit{cos} & \wedge & (x,y) \in \textit{égal} & \wedge & x \in \mathbb{R} & \wedge & y \in [-1,\ 1] & \Longrightarrow \\
(x,y) \in \textit{cos} & \wedge & (x,y) \in \textit{égal} & \wedge & x \in [-1,1] & \wedge & y \in [-1,\ 1] & \Longrightarrow \\
(x,y) \in \textit{cos} & \wedge & (x,y) \in \textit{égal} & \wedge & x \in [-1,1] & \wedge & y \in [5/10,\ 1] & \Longrightarrow \\
(x,y) \in \textit{cos} & \wedge & (x,y) \in \textit{égal} & \wedge & x \in [5/10,1] & \wedge & y \in [5/10,\ 1] & \Longrightarrow \\
(x,y) \in \textit{cos} & \wedge & (x,y) \in \textit{égal} & \wedge & x \in [5/10,1] & \wedge & y \in [5/10,\ 9/10] & \Longrightarrow \\
(x,y) \in \textit{cos} & \wedge & (x,y) \in \textit{égal} & \wedge & x \in [5/10,9/10] & \wedge & y \in [5/10,\ 9/10] & \Longrightarrow \\
(x,y) \in \textit{cos} & \wedge & (x,y) \in \textit{égal} & \wedge & x \in [5/10,9/10] & \wedge & y \in [6/10,\ 9/10] & \Longrightarrow \\
(x,y) \in \textit{cos} & \wedge & (x,y) \in \textit{égal} & \wedge & x \in [6/10,9/10] & \wedge & y \in [6/10,\ 9/10] & \Longrightarrow \\
(x,y) \in \textit{cos} & \wedge & (x,y) \in \textit{égal} & \wedge & x \in [6/10,9/10] & \wedge & y \in [6/10,\ 9/10]. &
\end{array}
$$

- Donc

$$x \in [6/10,\ 9/10]$$

RESOLUTION APPROCHEE PAR CALCUL DE POINT FIXE, 3



CONTRAINTE D'ADDITION

- $$\begin{pmatrix} z = x + y \\ \wedge \;\; x \in [-2,\; 5] \\ \wedge \;\; y \in [-3,\; 1] \\ \wedge \;\; z \in [-14,\; 1] \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z = x + y \\ \wedge \;\; x \in [-2,\; 4] \\ \wedge \;\; y \in [-3,\; 1] \\ \wedge \;\; z \in [-5,\; 1] \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} z = x + y \\ \wedge \;\; x \in [1,\; 9] \\ \wedge \;\; y \in [2,\; 4] \\ \wedge \;\; z \in [14,\; 16] \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z = x + y \\ \wedge \;\; x \in \emptyset \\ \wedge \;\; y \in \emptyset \\ \wedge \;\; z \in \emptyset \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} z = x + y \\ \wedge \;\; x \in [\underline{a},\; \overline{a}] \\ \wedge \;\; y \in [\underline{b},\; \overline{b}] \\ \wedge \;\; z \in [\underline{c},\; \overline{c}] \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z = x + y \\ \wedge \;\; x \in [\underline{a},\; \overline{a}] \cap [\underline{c} - \overline{b},\; \overline{c} - \underline{b}] \\ \wedge \;\; y \in [\underline{b},\; \overline{b}] \cap [\underline{c} - \overline{a},\; \overline{c} - \underline{a}] \\ \wedge \;\; z \in [\underline{c},\; \overline{c}] \cap [\underline{a} + \underline{b},\; \overline{a} + \overline{b}] \end{pmatrix}$$

CONTRAINTE DE MULTIPLICATION

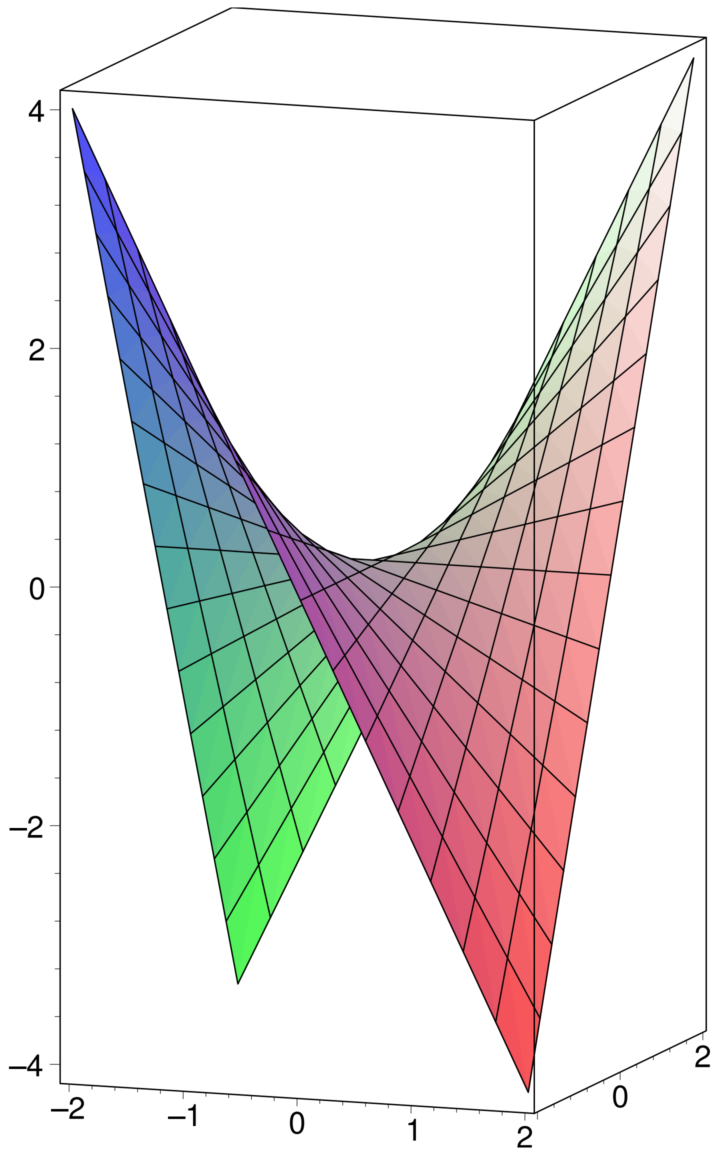
- $$\begin{pmatrix} \quad z = xy \\ \wedge \;\; x \in [-2,\; 5] \\ \wedge \;\; y \in [-3,\; 1] \\ \wedge \;\; z \in [-14,\; 17] \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \quad z = xy \\ \wedge \;\; x \in [-2,\; 5] \\ \wedge \;\; y \in [-3,\; 1] \\ \wedge \;\; z \in [-14,\; 6] \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} \quad z = xy \\ \wedge \;\; x \in [5,\; 6] \\ \wedge \;\; y \in [-4,\; 2] \\ \wedge \;\; z \in [-15,\; 13] \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \quad z = xy \\ \wedge \;\; x \in [5,\; 6] \\ \wedge \;\; y \in [-3,\; 2] \\ \wedge \;\; z \in [-15,\; 12] \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} \quad z = xy \\ \wedge \;\; x \in [1,\; 9] \\ \wedge \;\; y \in [2,\; 4] \\ \wedge \;\; z \in [8,\; 16] \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \quad z = xy \\ \wedge \;\; x \in [2,\; 8] \\ \wedge \;\; y \in [2,\; 4] \\ \wedge \;\; z \in [8,\; 16] \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} \quad z = xy \\ \wedge \;\; x \in [-1,\ 1] \\ \wedge \;\; y \in [-1,\ 1] \\ \wedge \;\; z \in [2,\ 2] \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \quad z = xy \\ \wedge \;\; x \in \emptyset \\ \wedge \;\; y \in \emptyset \\ \wedge \;\; z \in \emptyset \end{pmatrix}$$

UN APERCU DE LA MULTIPLICATION



• *fois* $:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$

CONTRAINTES GLOBALES

CONTRAINTES DE TRI

• Soient $2n$ intervalles $a_1, \dots, a_{2n}$ dans un ensemble totalement ordonné,

$$(\mathbf{D}, \preceq),$$

par exemple les entiers ou les réels.

• **Problème** Trouver les $2n$ intervalles $b_1, \dots, b_{2n}$, les plus petits possibles pour l'inclusion, tels qu'on ait l'équivalence de contraintes :

$$\begin{bmatrix} (x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \mathsf{tri}(x_1, \dots, x_n) \\ \wedge\ x_1 \in a_1 \\ \dots \\ \wedge\ x_{2n} \in a_{2n} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \mathsf{tri}(x_1, \dots, x_n) \\ \wedge\ x_1 \in b_1 \\ \dots \\ \wedge\ x_{2n} \in b_{2n} \end{bmatrix}$$

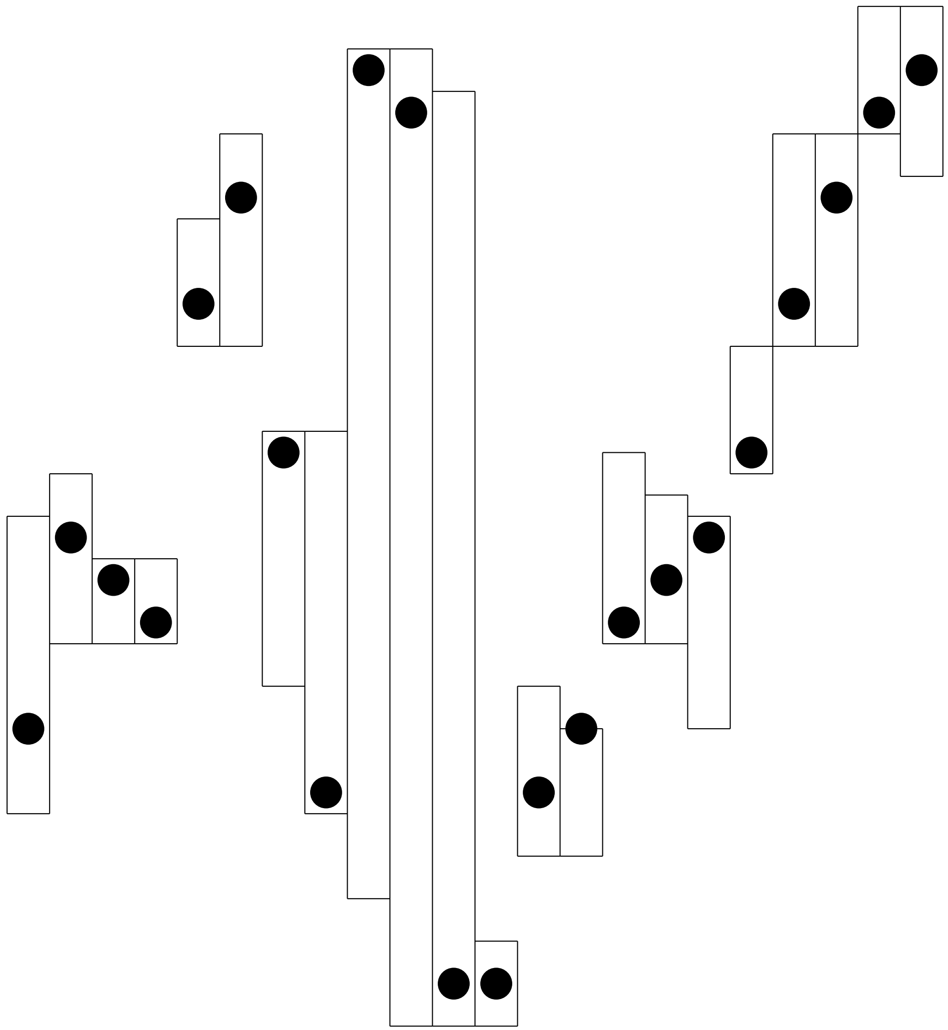
Ici $\mathsf{tri}(x_1, \dots, x_n)$ désigne le n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ trié dans l'ordre (non strictement) croissant.

• **Complexité** : $\mathcal{O}(n\ \log n)$

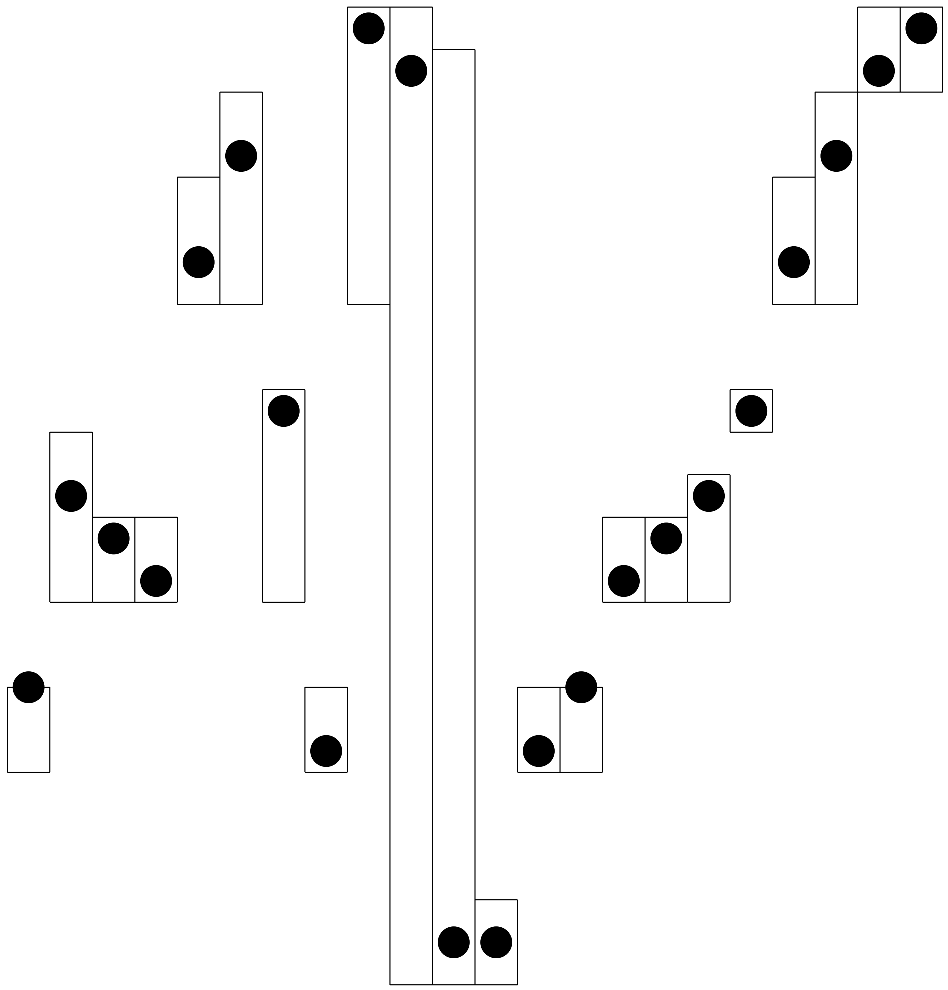
EXEMPLES D'INTERVALLES $\boldsymbol{a_i}$ avec $\boldsymbol{2n = 22}$

$$(a_1, \ldots, a_{2n}) =$$

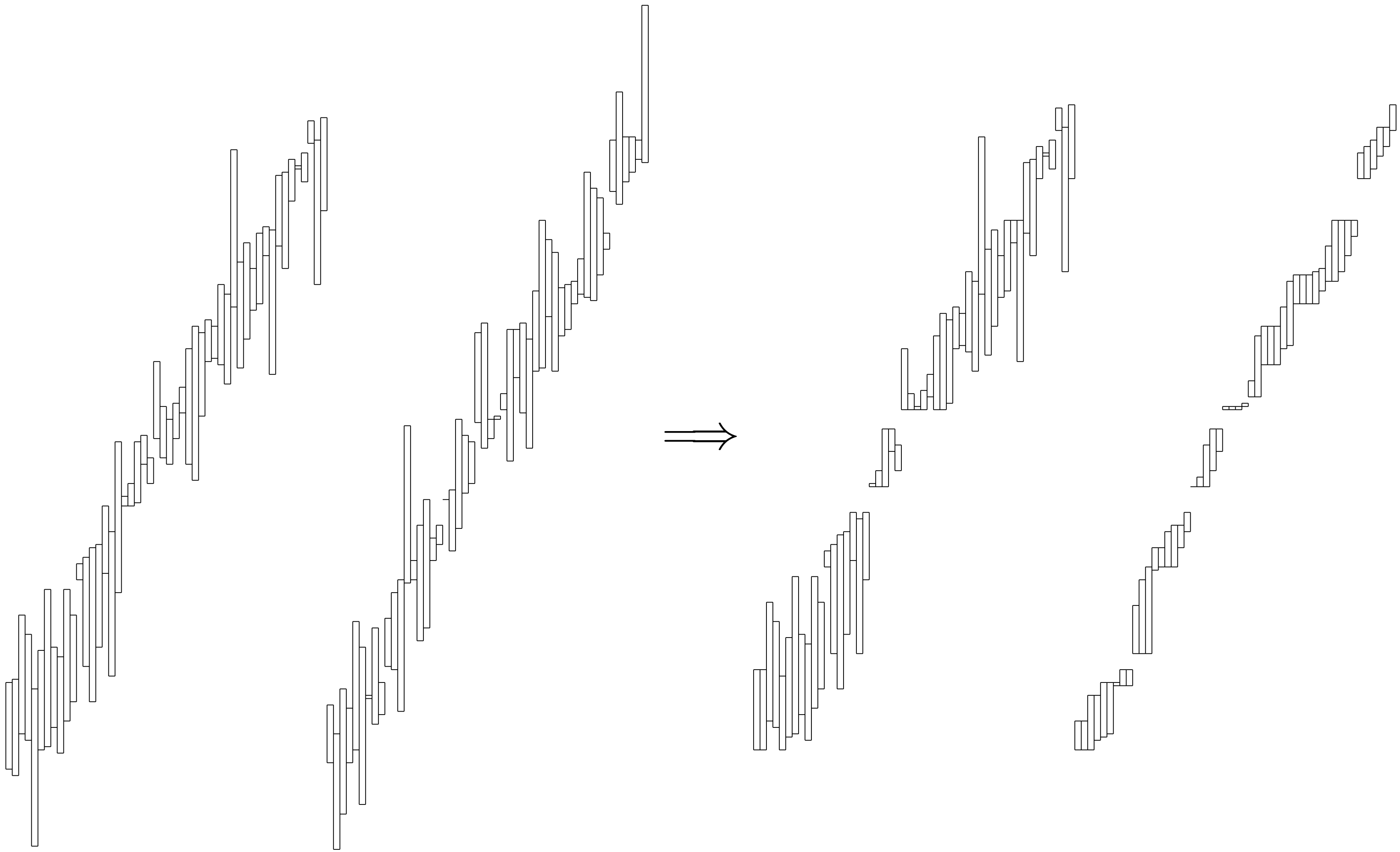
$$\begin{pmatrix} [10,24],[18,26],[18,22],[18,22],[32,38],[32,42],[16,28],[10,28],[6,46],[0,46],[0,44], \\ [0,4],[8,16],[8,14],[18,27],[18,25],[14,24],[26,32],[32,42],[32,42],[42,48],[40,48] \end{pmatrix}$$



LES b_i OBTENUS PAR REDUCTION



EXEMPLE DE RESOLUTION POUR $\boldsymbol{2n = 100}$



Complexité : $\mathcal{O}(n \, \log n)$

CONTRAINTE DE PERMUTATION

• Soient $2n$ intervalles $a_1, \ldots, a_{2n}$ dans un ensemble totalement ordonné,

$$(\mathbf{D}, \preceq),$$

par exemple les entiers ou les réels.

• **Problème** Trouver les $2n$ intervalles $b_1, \ldots, b_{2n}$, les plus petits possibles pour l'inclusion, tels qu'on ait l'équivalence de contraintes :

$$\left[\begin{array}{l} \{\!|x_1, \ldots, x_n|\!\} = \{\!|x_{n+1}, \ldots, x_{2n}|\!\} \\ \wedge\ x_1 \in a_1 \\ \ldots \\ \wedge\ x_{2n} \in a_{2n} \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{\!|x_1, \ldots, x_n|\!\} = \{\!|x_{n+1}, \ldots, x_{2n}|\!\} \\ \wedge\ x_1 \in b_1 \\ \ldots \\ \wedge\ x_{2n} \in b_{2n} \end{array}\right]$$

• **Complexité** : $\mathcal{O}(n\ \log n)$

CONTRAINTE TOUS DIFFERENTS

• Soient $2n$ intervalles $a_1, \ldots, a_{2n}$ dans un ensemble muni d'un ordre total discret,

$$(\mathbf{D}, \preceq),$$

par exemple les entiers.

• **Problème** Trouver les $2n$ intervalles $b_1, \ldots, b_{2n}$, les plus petits possibles pour l'inclusion, tels qu'on ait l'équivalence de contraintes :

$$\begin{bmatrix} (x_1, \ldots, x_n) \in \textsf{tousdifferents} \\ \wedge\ x_1 \in a_1 \\ \ldots \\ \wedge\ x_{2n} \in a_{2n} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (x_1, \ldots, x_n) \in \textsf{tousdifferents} \\ \wedge\ x_1 \in b_1 \\ \ldots \\ \wedge\ x_{2n} \in b_{2n} \end{bmatrix}$$

• **Complexité** : $\mathcal{O}(n\ \log n)$